Line Segments

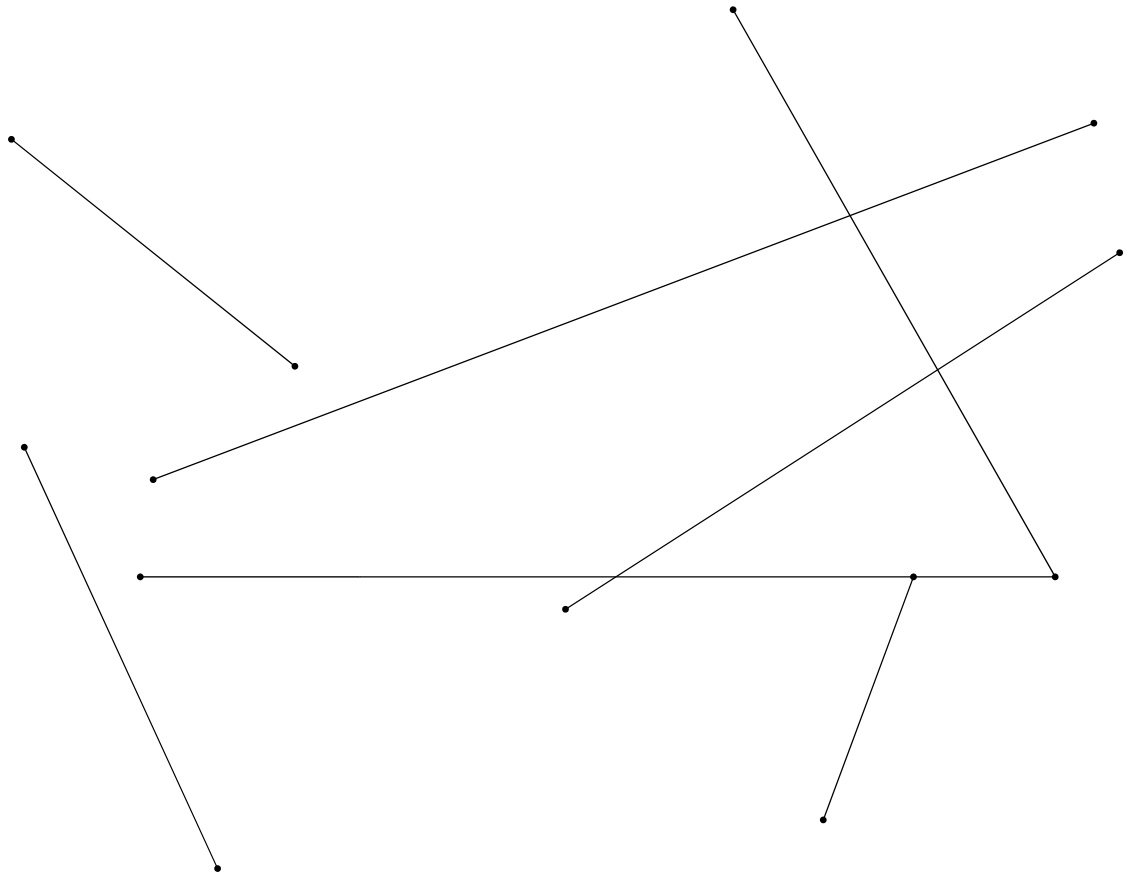
Alexander Gran

Datenstrukturen und Algorithmen

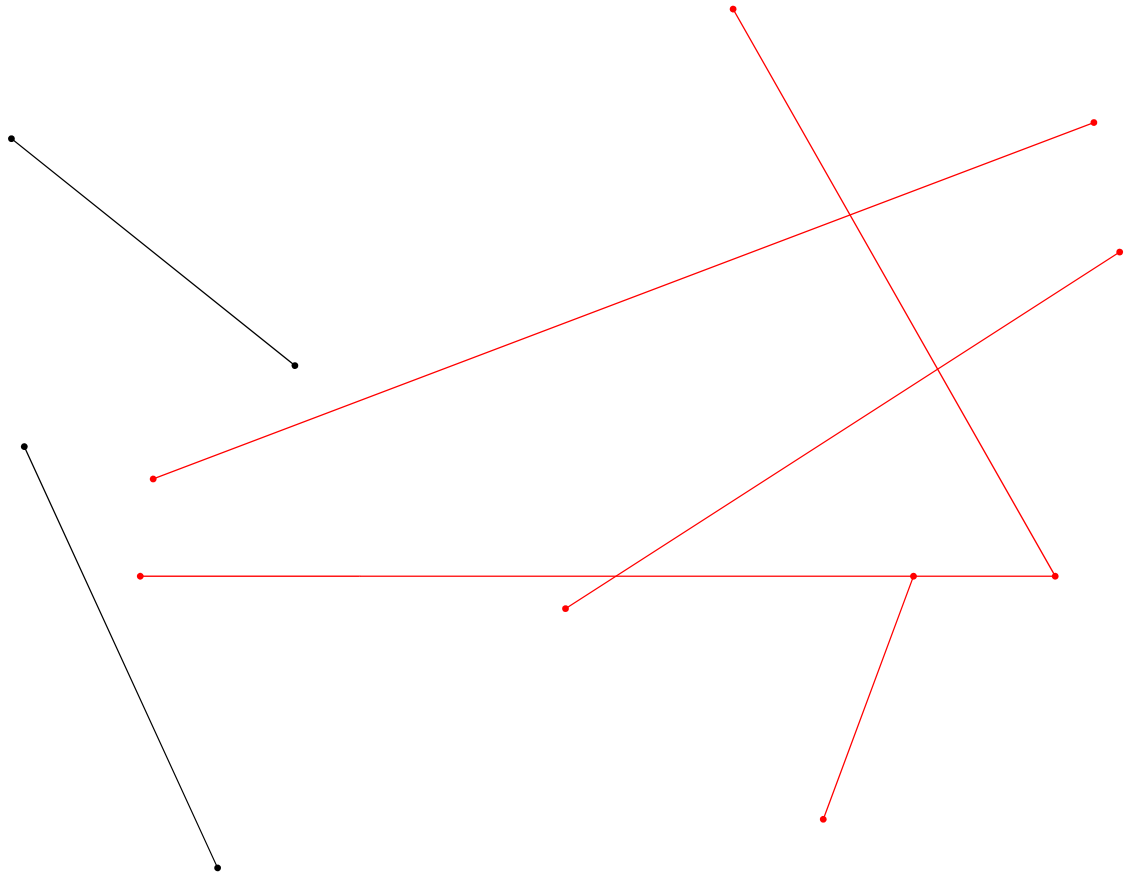
SS 2005

Problemstellung:
Gegeben: Eine Menge Linien, gesucht die sich schneidenden Linien.

Problem



Lösung



Formalismus

Die Punkte liegen für gehwöhnlich als Koordinatentupel (x,y) vor.

Formalismus

Die Punkte liegen für gehwöhnlich als Koordinatentupel (x,y) vor.
Linien typischerweise als Anfangs- und Endpunkt.

Formalismus

Die Punkte liegen für gehwöhnlich als Koordinatentupel (x,y) vor.
Linien typischerweise als Anfangs- und Endpunkt.
Alternativ auch als Vektoren, Gerade etc. Die Definition der Linie über eine convexe Hülle der beiden Endpunkte findet sich auch.

Formalismus

Die Punkte liegen für gehwöhnlich als Koordinatentupel (x,y) vor. Linien typischerweise als Anfangs- und Endpunkt.
Alternativ auch als Vektoren, Gerade etc. Die Definition der Linie über eine convexe Hülle der beiden Endpunkte findet sich auch.
Mit Abstand ist hier der euklidische Abstand gemeint ($\sqrt{(x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2}$).

Wann schneiden sich zwei Linien?

Wann schneiden sich zwei Linien?

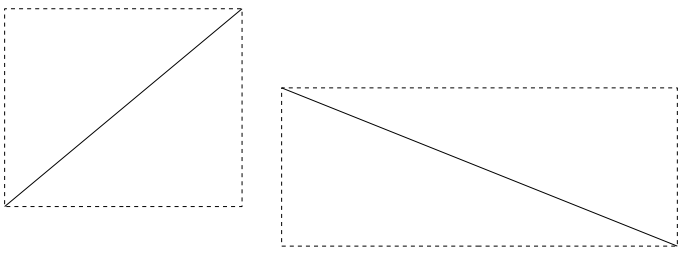
- Umgebende Rechtecke müssen überlappen

Wann schneiden sich zwei Linien?

- Umgebende Rechtecke müssen überlappen
- Start- und Endpunkt der einen Linie müssen auf verschiedenen Seiten der andern liegen

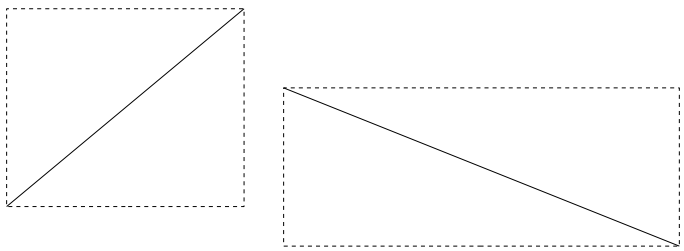
Umgebende Rechtecke:

Schnitt unmöglich

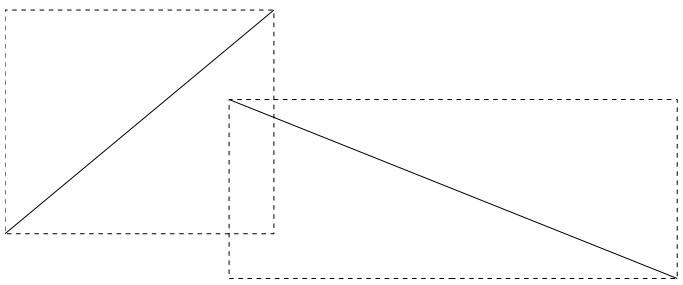


Umgebende Rechtecke:

Schnitt unmöglich

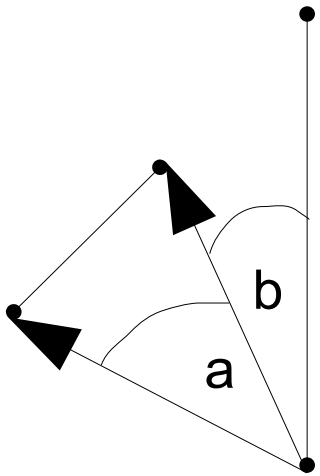


Schnitt möglich



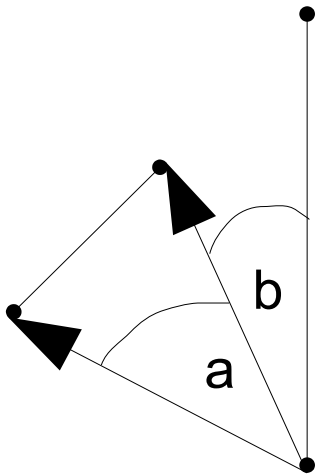
Seitentest

Kein Schnitt: $a < 0 \wedge b < 0$

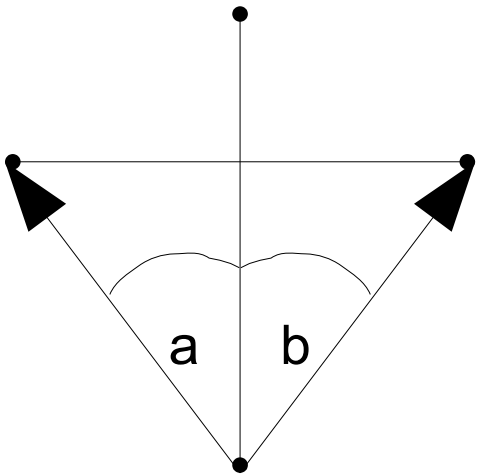


Seitentest

Kein Schnitt: $a < 0 \wedge b < 0$

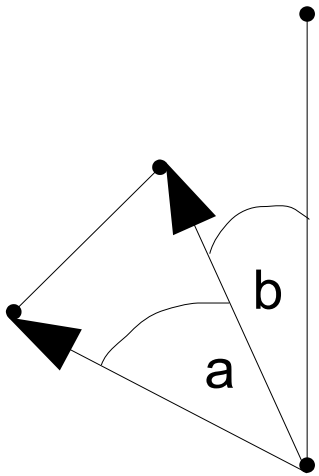


Schnitt: $a < 0 \wedge b > 0$

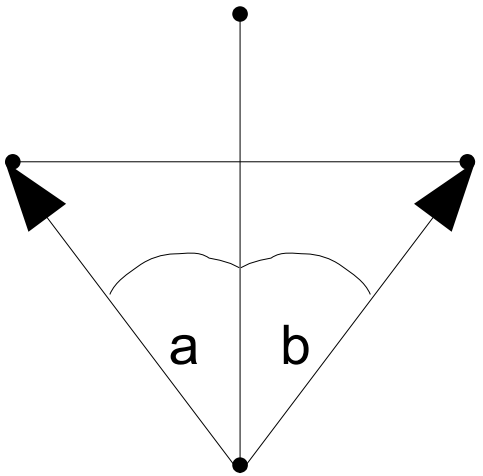


Seitentest

Kein Schnitt: $a < 0 \wedge b < 0$



Schnitt: $a < 0 \wedge b > 0$



Generell: Verschiedene Vorzeichen von a und b

Seitentest Implementierung

Implementierung von Sun, Java 5 Tiger

```
1  public static int relativeCCW(double X1, double Y1,
2          double X2, double Y2,
3          double PX, double PY) {
4      X2 -= X1;
5      Y2 -= Y1;
6      PX -= X1;
7      PY -= Y1;
8      double ccw = PX * Y2 - PY * X2;
9      if (ccw == 0.0) {
10         ccw = PX * X2 + PY * Y2;
11         if (ccw > 0.0) {
12             PX -= X2;
13             PY -= Y2;
14             ccw = PX * X2 + PY * Y2;
15             if (ccw < 0.0) {
16                 ccw = 0.0;
17             }
18         }
19     }
20     return (ccw < 0.0) ? -1 : ((ccw > 0.0) ? 1 : 0);
```

Laufzeitanalyse Schnitttest

Rechteckü̈berlappung: $O(1)$

Laufzeitanalyse Schnitttest

Rechteckü̈berlappung: $O(1)$
Seitentest: $O(1)$

Laufzeitanalyse Schnitttest

Rechteckü̈berlappung: $O(1)$
Seitentest: $O(1)$
Gesamt: $O(1)$

Alle Linien miteinander vergleichen:

Alle Linien miteinander vergleichen:

```
1  TreeSet<TwoLines> result = new TreeSet<TwoLines>(new
       TwoLineComparatorX());
2  for(int i=0; i!= lines.size(); i++) {
3      for(int j=0; j!= lines.size(); j++) {
4          if(i != j) {
5              if(lines.get(i).intersects(lines.get(j))) {
6                  result.add(new
                       TwoLines(lines.get(i),lines.get(j)));
7              }
8          }
9      }
10 }
```

Problem

Bei n Linen n^2 Vergleiche.

Problem

Bei n Linen n^2 Vergleiche.
Übliche Datenmenge: 10^6 Linien $\rightarrow 10.000.000.000.000$ Vergleiche.

Sweeping Idee

Je näher Linien bei einander liegen, desto eher schneiden sie sich.

Sweeping Idee

Je näher Linien bei einander liegen, desto eher schneiden sie sich.
Ursprung: Rechteckü̈berlappung

Sweeping Idee

Je näher Linien bei einander liegen, desto eher schneiden sie sich.
Ursprung: Rechtecküberlappung
Definition der Nähe:
Totale Ordnung in X Richtung, dann in Y Richtung.

Vorgehen

Eine gedachte Sweepline wandert - sweeped - in X Richtung - in aller Regel also von links nach rechts - über die Linien.

Vorgehen

Eine gedachte Sweepline wandert - sweeped - in X Richtung - in aller Regel also von links nach rechts - über die Linien. Dabei werden möglichst wenig Linien untereinander auf Schnitt getestet.

Implementierung

Implementierung mittels Comparator:

```
1  public class PointComparatorXY implements Comparator<Point>{
2      public int compare(Point a, Point b) {
3          double dif = a.getX()-b.getX();
4          double dif2 = a.getY()-b.getY();
5          if (dif > 0) {
6              return 1;
7          } else if (dif < 0) {
8              return -1;
9          } else {
10             if (dif2 > 0)  {
11                 return 1;
12             } else if (dif2 < 0) {
13                 return -1;
14             } else {
15                 return 0;
16             }
17         }
18     }
19 }
```

Laufzeitanalyse

Ein Vergleich: $O(1)$

Laufzeitanalyse

Ein Vergleich: $O(1)$
Damit sortierung von n Punkt wie üblich in $O(n \log(n))$
mittels autobalancierenden Baum oder QuickSort.

Laufzeitanalyse

Ein Vergleich: $O(1)$
Damit sortierung von n Punkt wie üblich in $O(n \log(n))$
mittels autobalancierenden Baum oder QuickSort.
Hier wird ein Red-Black Baum aus der API verwendet
(java.util.TreeMap bzw java.util.TreeSet)

Ereignis-Punkte

Die Sweepline "hält"nur an interessanten Punkten an.

Ereignis-Punkte

Die Sweepline "hält"nur an interessanten Punkten an.
Interessant sind:

- Startpunkte von Linien

Ereignis-Punkte

Die Sweepline "hält"nur an interessanten Punkten an.
Interessant sind:

- Startpunkte von Linien
- Endpunkte von Linien

Ereignis-Punkte

Die Sweepline "hält"nur an interessanten Punkten an.
Interessant sind:

- Startpunkte von Linien
- Endpunkte von Linien
- Schnittpunkte von Linien

Ereignis-Punkte

Die Sweepline "hält"nur an interessanten Punkten an.
Interessant sind:

- Startpunkte von Linien
- Endpunkte von Linien
- Schnittpunkte von Linien

Schnittpunkte müssen berechnet werden!

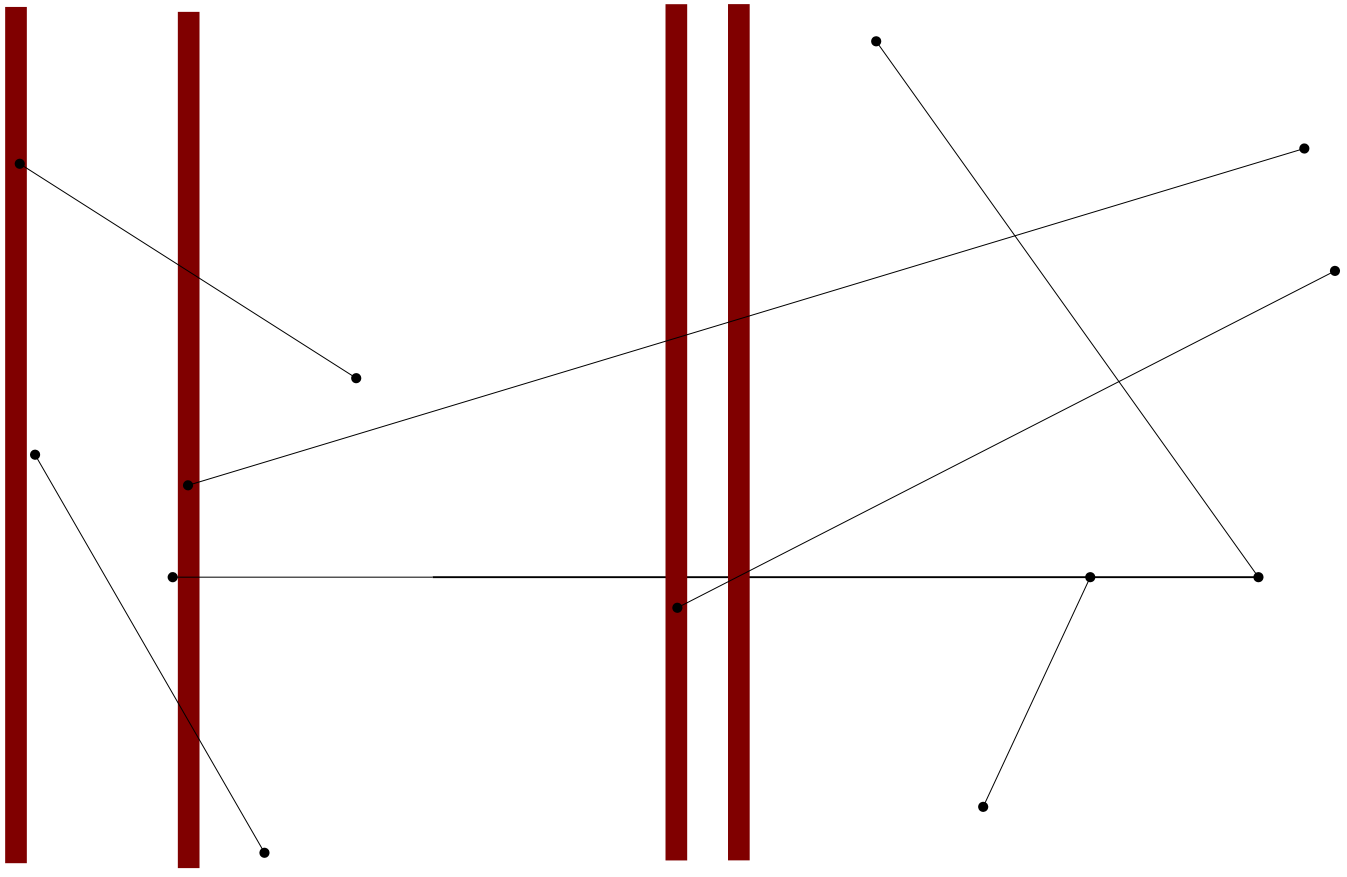
Ereignis-Punkte

Die Sweepline "hält"nur an interessanten Punkten an.
Interessant sind:

- Startpunkte von Linien
- Endpunkte von Linien
- Schnittpunkte von Linien

Schnittpunkte müssen berechnet werden!
Berechnung muss on the fly erfolgen.

Ereignis-Punkte



Datenstruckturen

Es werden benötigt:

- $schedule$ Eine sortierte Map, die die noch zu verarbeitenden Punkte enthält, und auf ihre Linie(n) abbildet.

Datenstruckturen

Es werden benötigt:

- $schedule$ Eine sortierte Map, die die noch zu verarbeitenden Punkte enthält, und auf ihre Linie(n) abbildet.
  Darin müssen die Schnittpunkte während der Berechnung eingefügt werden.

Datenstruckturen

Es werden benötigt:

- $schedule$ Eine sortierte Map, die die noch zu verarbeitenden Punkte enthält, und auf ihre Linie(n) abbildet.
  Darin müssen die Schnittpunkte während der Berechnung eingefügt werden.
  Hier: java.util.TreeMap

Datenstruckturen

Es werden benötigt:

- $schedule$ Eine sortierte Map, die die noch zu verarbeitenden Punkte enthält, und auf ihre Linie(n) abbildet.
  Darin müssen die Schnittpunkte während der Berechnung eingefügt werden.
  Hier: java.util.TreeMap
- $status$ Eine sortierte Menge der Linien, die gerade unter der Sweepline liegen

Datenstruckturen

Es werden benötigt:

- $schedule$ Eine sortierte Map, die die noch zu verarbeitenden Punkte enthält, und auf ihre Linie(n) abbildet.
  Darin müssen die Schnittpunkte während der Berechnung eingefügt werden.
  Hier: java.util.TreeMap
- $status$ Eine sortierte Menge der Linien, die gerade unter der Sweepline liegen
  Hier java.util.TreeSet

Datenstruckturen

Es werden benötigt:

- $schedule$ Eine sortierte Map, die die noch zu verarbeitenden Punkte enthält, und auf ihre Linie(n) abbildet.
  Darin müssen die Schnittpunkte während der Berechnung eingefügt werden.
  Hier: java.util.TreeMap
- $status$ Eine sortierte Menge der Linien, die gerade unter der Sweepline liegen
  Hier java.util.TreeSet
- $result$ Eine Menge der sich schneidenden Linien

Datenstruckturen

Es werden benötigt:

- $schedule$ Eine sortierte Map, die die noch zu verarbeitenden Punkte enthält, und auf ihre Linie(n) abbildet.
  Darin müssen die Schnittpunkte während der Berechnung eingefügt werden.
  Hier: java.util.TreeMap
- $status$ Eine sortierte Menge der Linien, die gerade unter der Sweepline liegen
  Hier java.util.TreeSet
- $result$ Eine Menge der sich schneidenden Linien
  Hier java.util.HashSet

Datenstruckturen

Es werden benötigt:

- $schedule$ Eine sortierte Map, die die noch zu verarbeitenden Punkte enthält, und auf ihre Linie(n) abbildet.
  Darin müssen die Schnittpunkte während der Berechnung eingefügt werden.
  Hier: java.util.TreeMap
- $status$ Eine sortierte Menge der Linien, die gerade unter der Sweepline liegen
  Hier java.util.TreeSet
- $result$ Eine Menge der sich schneidenden Linien
  Hier java.util.HashSet

Alle diese unterstützen die nötigen Operationen (insert, delete, getNext etc.) in $O(\log(n))$

Der eigentliche Algorithmus

- Startpunkt

Der eigentliche Algorithmus

- Startpunkt
  Linie des Punktes in $status$ einfügen.

Der eigentliche Algorithmus

- Startpunkt
  Linie des Punktes in $status$ einfügen.
  Schnitttest mit Vorgänger und Nachfolger.

Der eigentliche Algorithmus

- Startpunkt
  Linie des Punktes in $status$ einfügen.
  Schnitttest mit Vorgänger und Nachfolger.
- Endpunkt

Der eigentliche Algorithmus

- Startpunkt
  Linie des Punktes in $status$ einfügen.
  Schnitttest mit Vorgänger und Nachfolger.
- Endpunkt
  Linie des Punktes aus $status$ entfernen.

Der eigentliche Algorithmus

- Startpunkt
  Linie des Punktes in $status$ einfügen.
  Schnitttest mit Vorgänger und Nachfolger.
- Endpunkt
  Linie des Punktes aus $status$ entfernen.
  Es entstehen zwei neue Nachbarn, Vorgänger und Nachfolger der Linie. Schnittest dieser Beiden.

Der eigentliche Algorithmus

- Startpunkt
  Linie des Punktes in $status$ einfügen.
  Schnitttest mit Vorgänger und Nachfolger.
- Endpunkt
  Linie des Punktes aus $status$ entfernen.
  Es entstehen zwei neue Nachbarn, Vorgänger und Nachfolger der Linie. Schnittest dieser Beiden.

Bei jedem positivem Schnitttest werden die sich schneidenden in $result$ gespeichert;

Der eigentliche Algorithmus

- Startpunkt
  Linie des Punktes in $status$ einfügen.
  Schnitttest mit Vorgänger und Nachfolger.
- Endpunkt
  Linie des Punktes aus $status$ entfernen.
  Es entstehen zwei neue Nachbarn, Vorgänger und Nachfolger der Linie. Schnittest dieser Beiden.

Bei jedem positivem Schnitttest werden die sich schneidenden in $result$ gespeichert; Der Schnittpunkt kommt als neuer Ereignis-Punkt in $schedule$. Er verweist auf die schneidenden Linien.

Der eigentliche Algorithmus

- Schnittpunkt

Der eigentliche Algorithmus

- Schnittpunkt
  Hier tauschen die Schneidenden ihre Position in $status$. Daher bekommen Beide einen neuen Nachbarn $\rightarrow$ zwei Schnittests.

Implementierung

Initialisierung

```
1  private TreeSet<Line> status;
2
3  private SortedMap<Point,Object> schedule;
4
5  private HashSet<TwoLines> result;
6
7  private LineComparatorY comp;
8
9  public TwoLines[] getLineSegments(ArrayList<Line> lines) {
10     schedule = getSortedEndPoints(lines);
11     comp = new LineComparatorY();
12     status = new TreeSet<Line>(comp);
13     result = new HashSet<TwoLines>(lines.size()/10);
```

Implementierung

Hauptschleife

```
14      Point p = schedule.firstKey();
15      while(p != null) {
16          Object o = schedule.get(p);
17          if(o instanceof Line) { //endpoint
27          } else { //intersection
47          p = nextEPoint();
48          comp.x = p.getX();
```

Implementierung

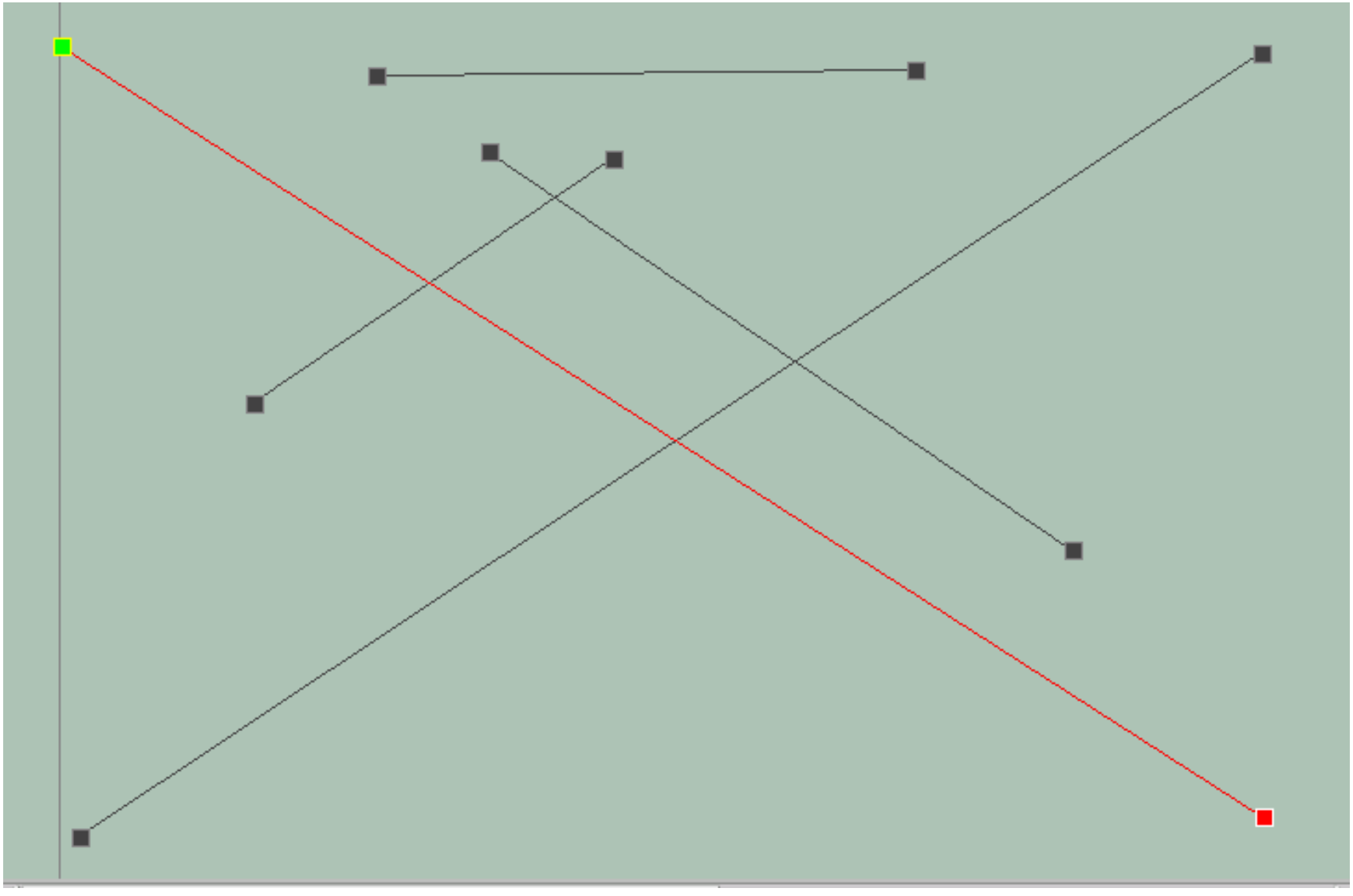
Endpunkt

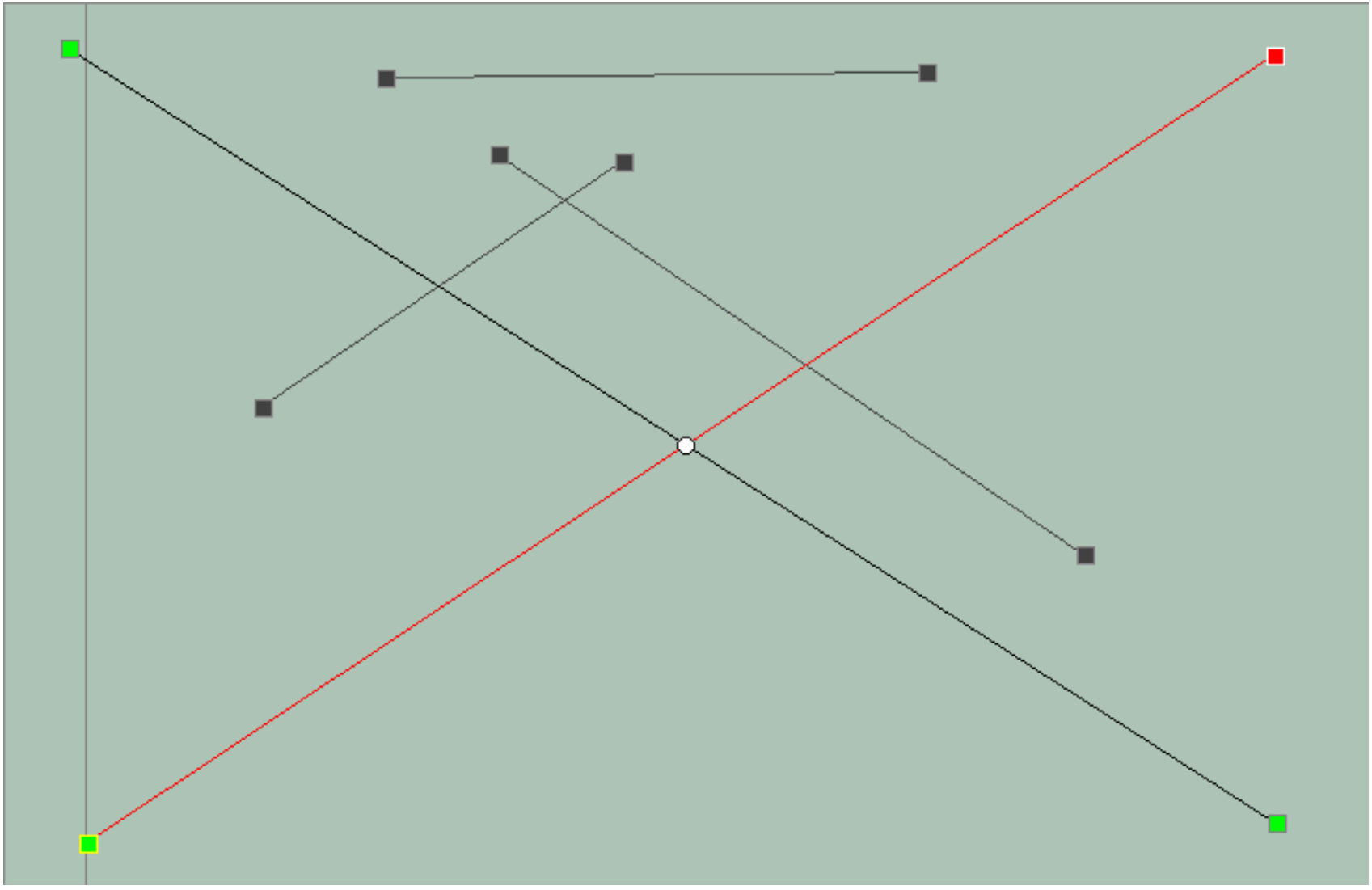
```
16          Object o = schedule.get(p);
17          if(o instanceof Line) { //endpoint
18              Line l = (Line)o;
19              if(l.getLeft() == p) { //left endpoint
20                  status.add(l);
21                  testIntersect(getPrev(l), l);
22                  testIntersect(getNext(l), l);
23              } else{ //right endpoint
24                  testIntersect(getPrev(l), getNext(l));
25                  status.remove(l);
26              }
```

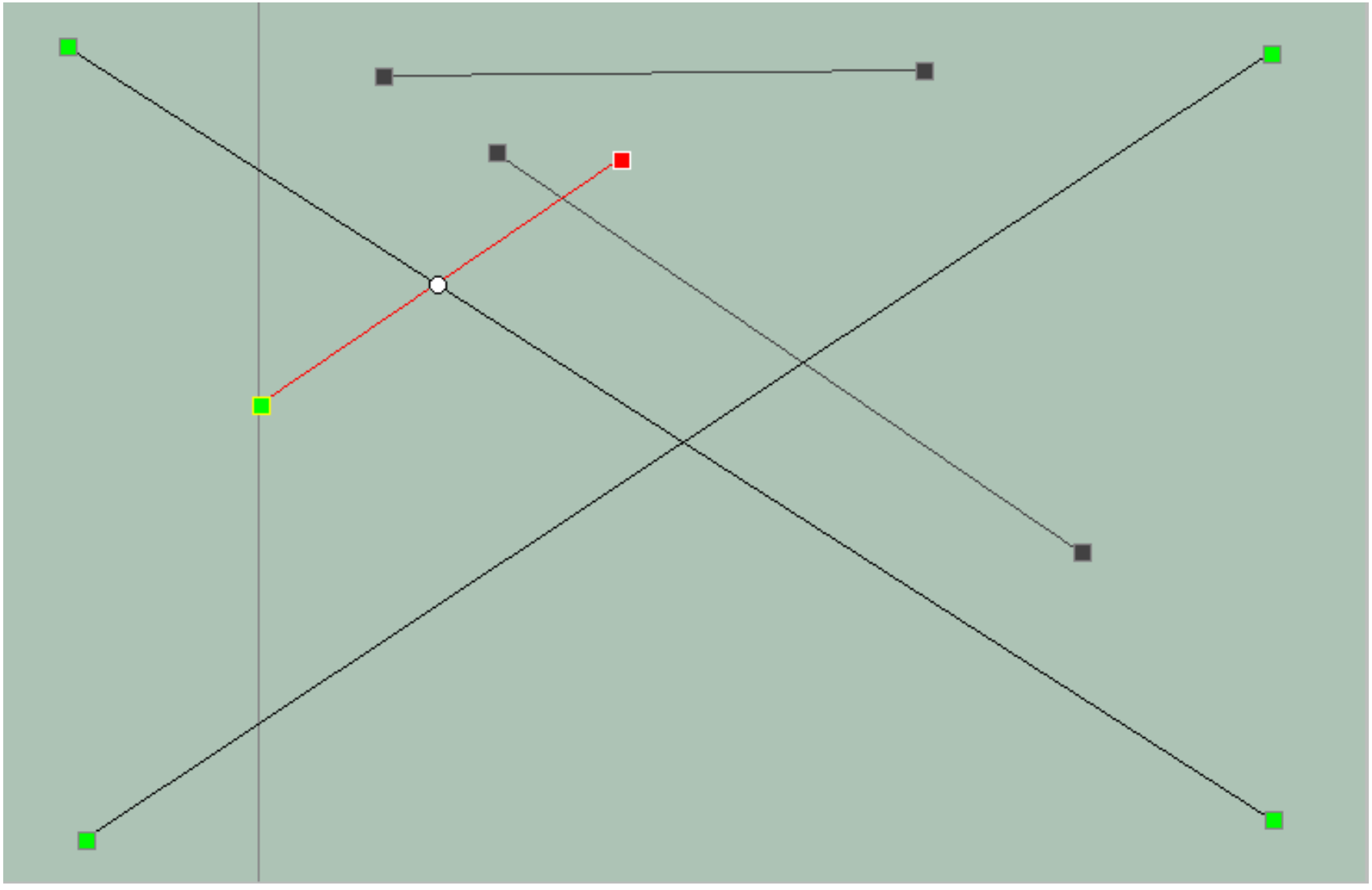
Implementierung

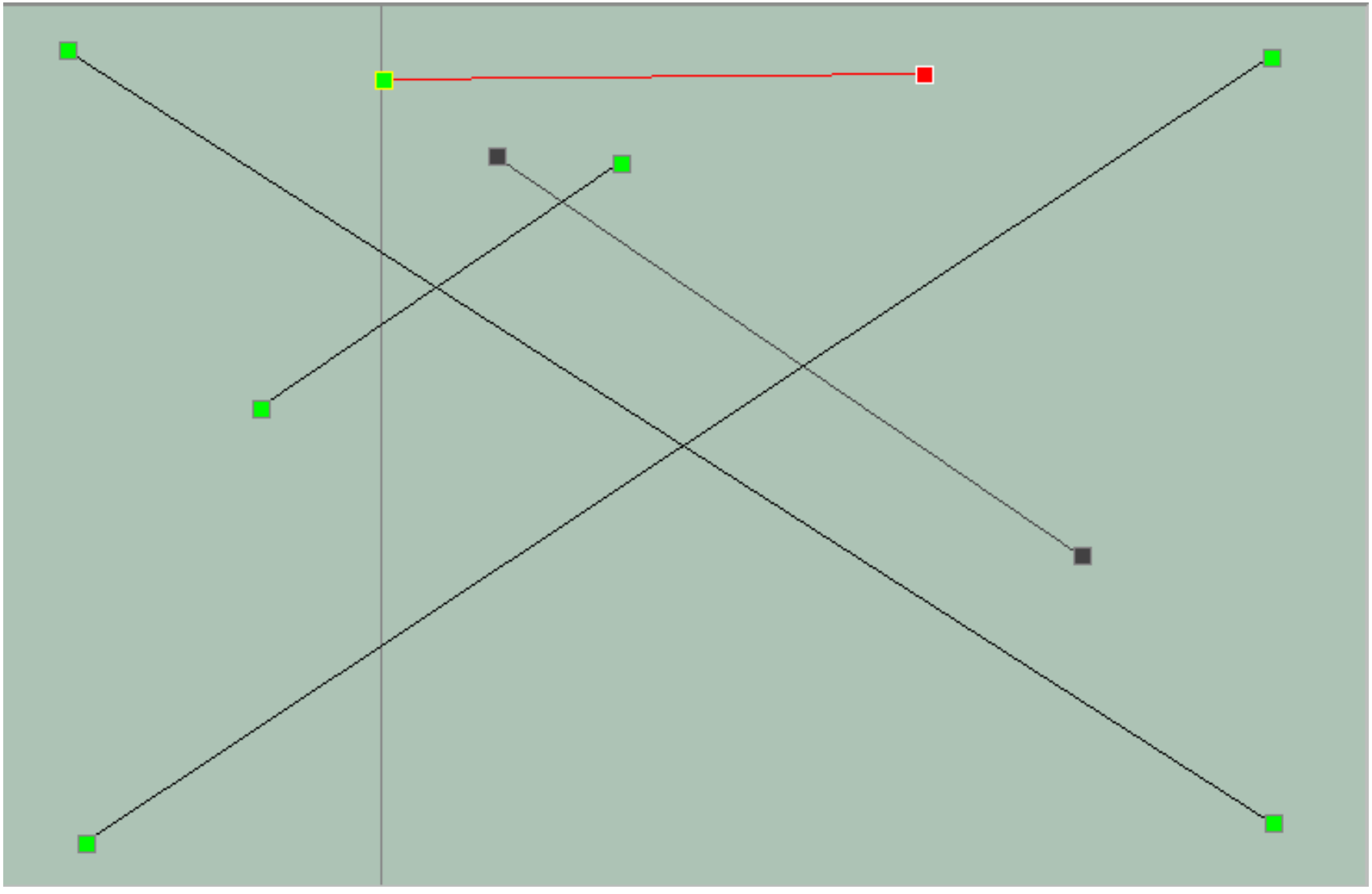
Schnittpunkt

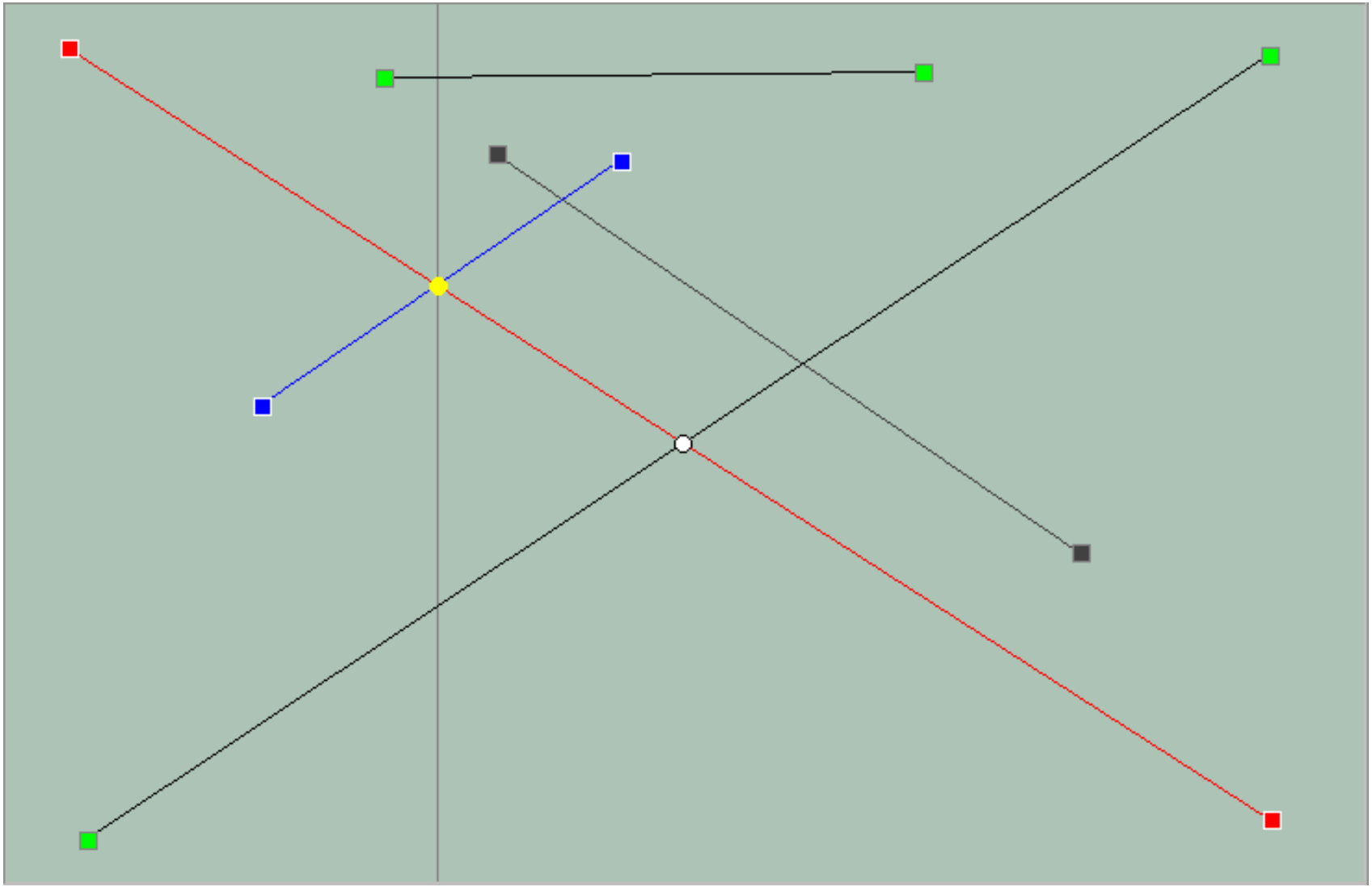
```
28              TwoLines l = (TwoLines)o;
29              comp.x -= DELTA; //ensuring order
30              Line beforeUpper;
31              Line beforeLower;
32              if(comp.compare(l.getA(), l.getB()) < 0) {
33                  beforeUpper = l.getA();
34                  beforeLower = l.getB();
35              } else {
36                  beforeUpper = l.getB();
37                  beforeLower = l.getA();
38              }
39              Line prev = getPrev(beforeUpper);
40              Line next = getNext(beforeLower);
41              status.remove(beforeUpper);
42              comp.x += 3*DELTA; //ensuring order
43              status.add(beforeUpper);
44              testIntersect(prev, beforeLower);
45              testIntersect(next, beforeUpper);
```

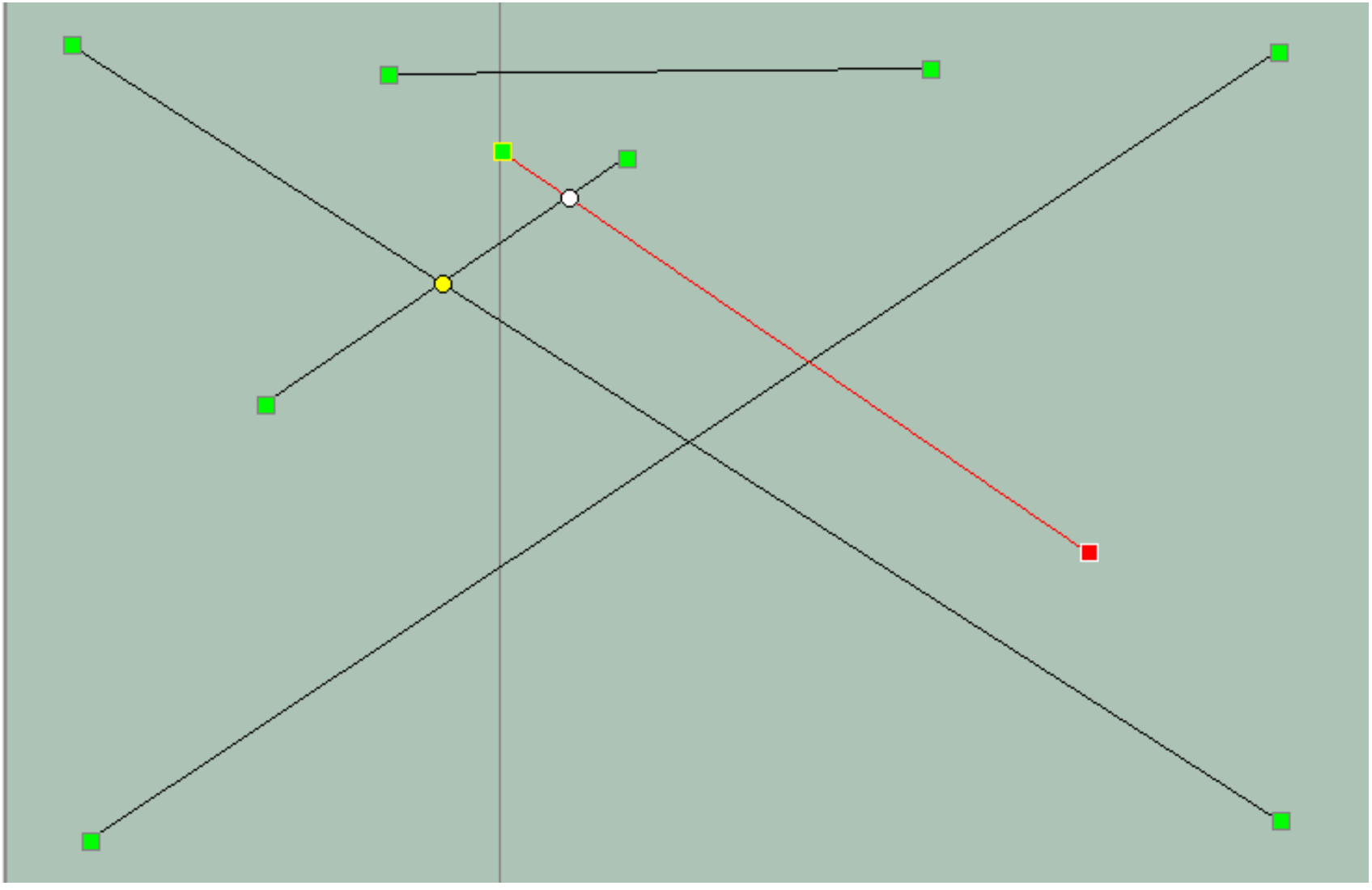


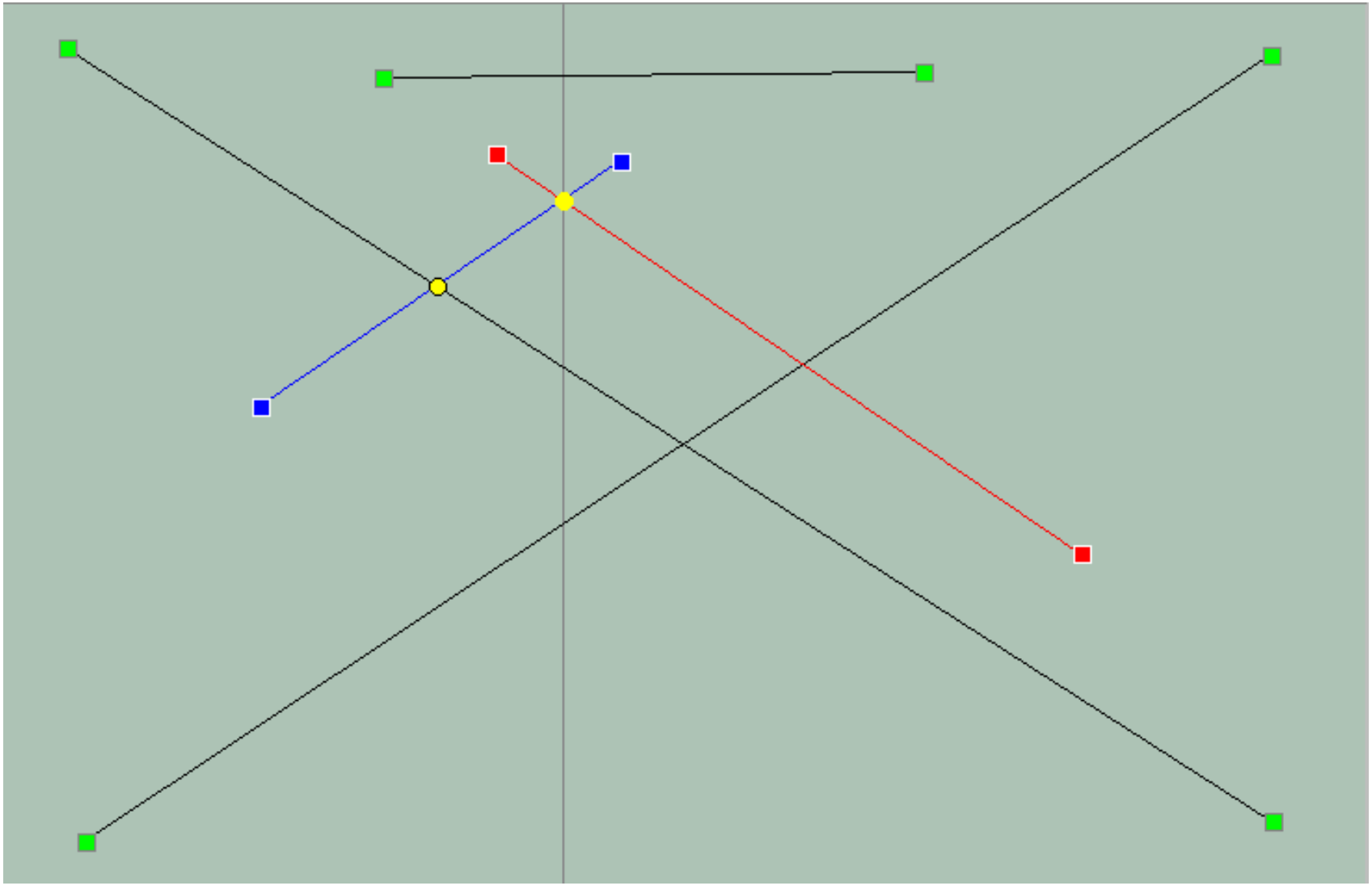


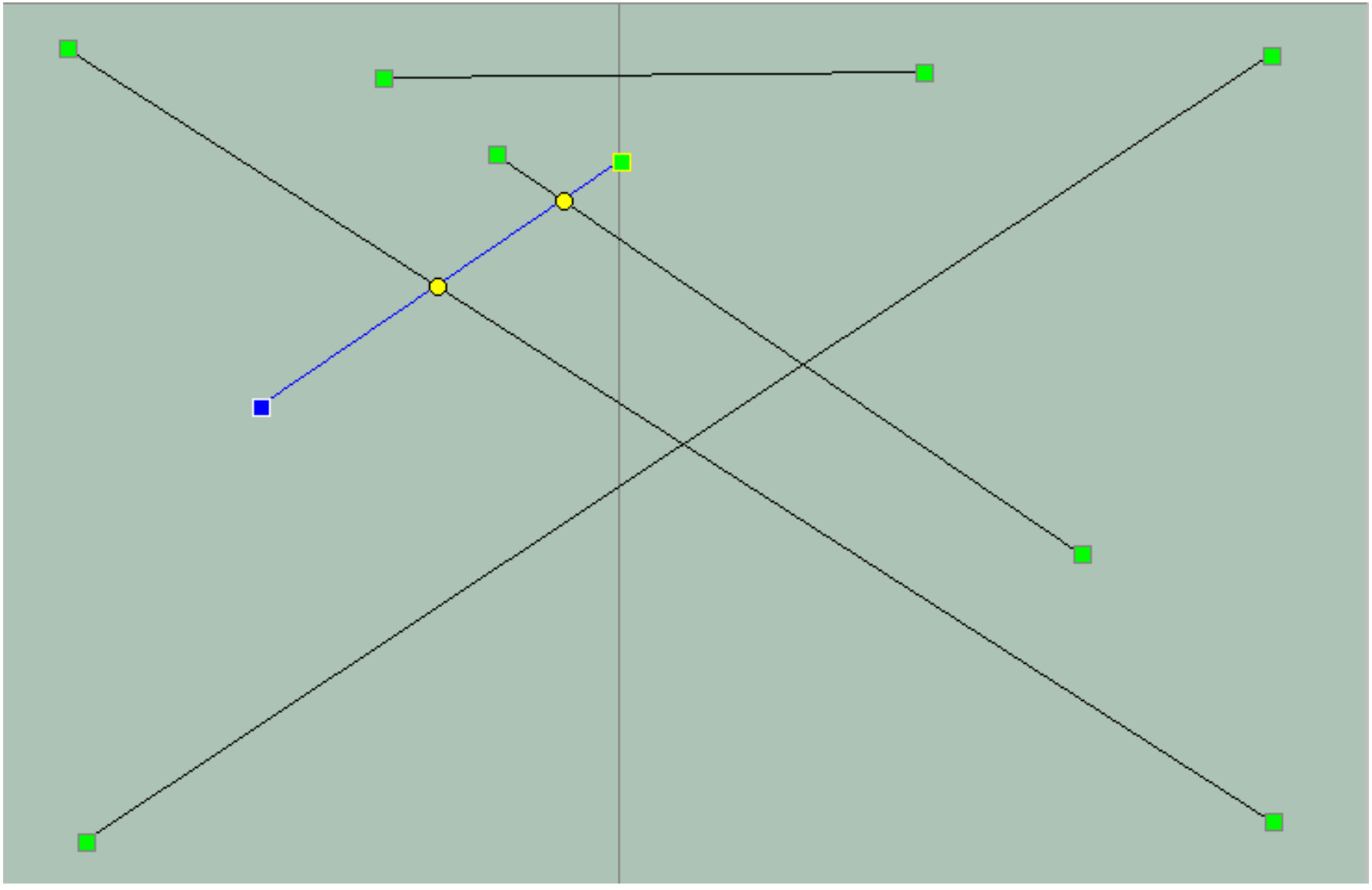


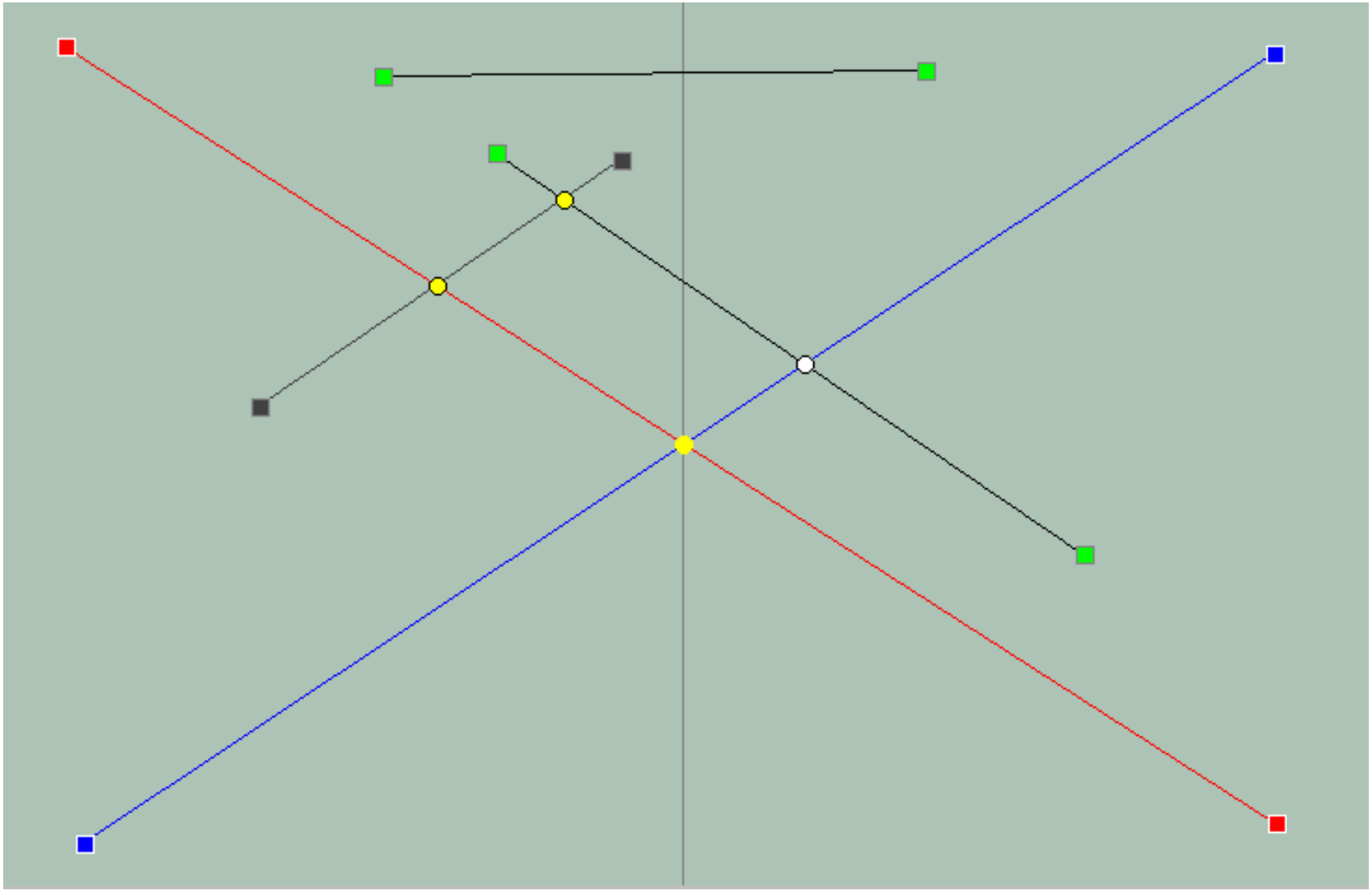


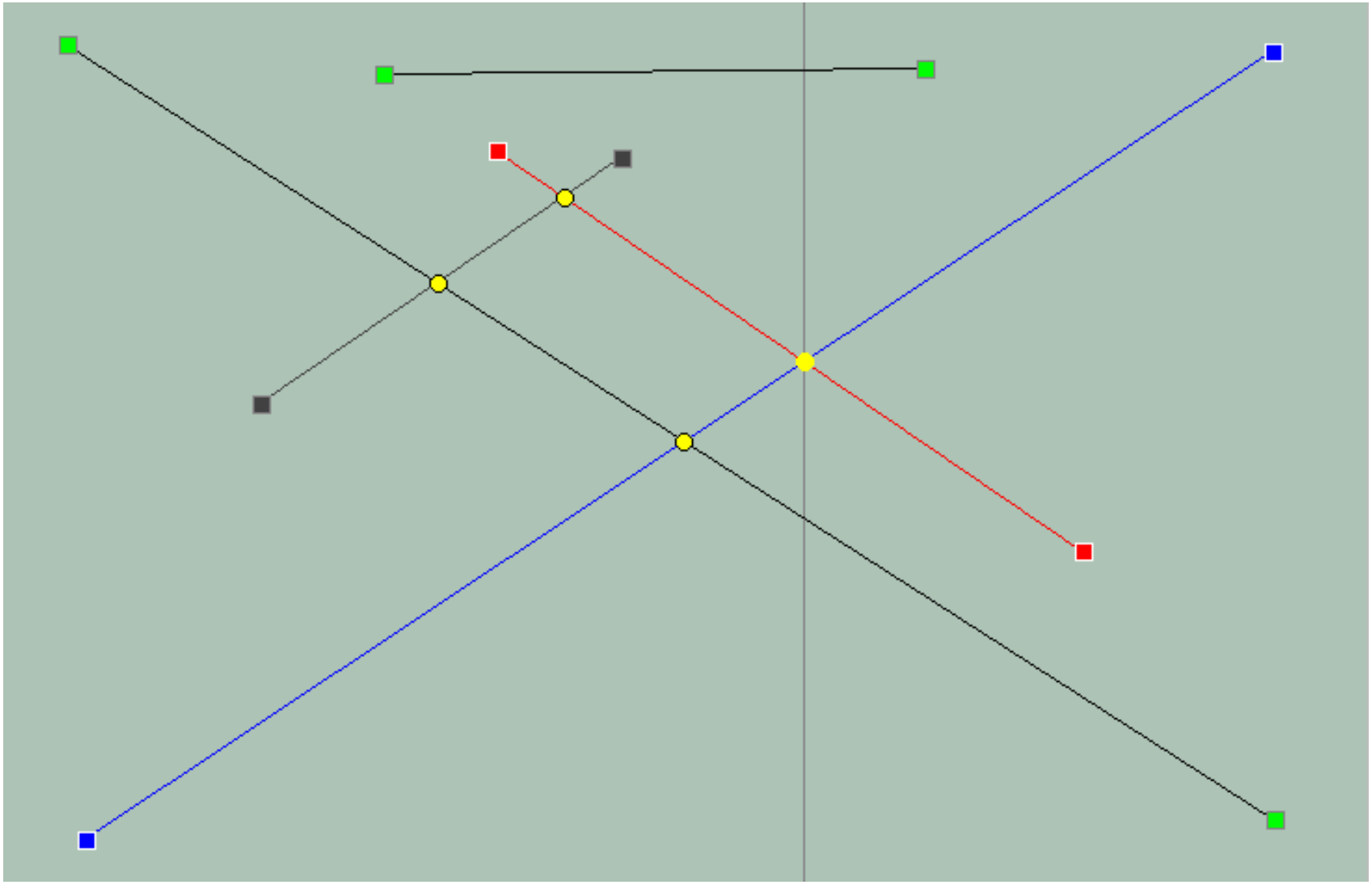












Laufzeitanalyse

Seien n die Anzahl der Linien, k die Anzahl der sich Schneidenden.

- Vorsortieren

```
54 private TreeMap<Point, Object>
       getSortedEndPoints(ArrayList<Line> lines) {
55     TreeMap<Point,Object> a = new
           TreeMap<Point,Object>(new PointComparatorXY());
56     for (Line l : lines) {
57         a.put(l.getStart(), l);
58         a.put(l.getEnd(), l);
59     }
60     return a;
61 }
```

Laufzeitanalyse

Seien n die Anzahl der Linien, k die Anzahl der sich Schneidenden.

- Vorsortieren

```
54 private TreeMap<Point, Object>
       getSortedEndPoints(ArrayList<Line> lines) {
55     TreeMap<Point,Object> a = new
           TreeMap<Point,Object>(new PointComparatorXY());
56     for (Line l : lines) {
57         a.put(l.getStart(), l);
58         a.put(l.getEnd(), l);
59     }
60     return a;
61 }
```

Einfügen in $schedule$. Jedes Einfügen ist in $O(log(n))$, es werden n Linien eingefügt

Laufzeitanalyse

Seien n die Anzahl der Linien, k die Anzahl der sich Schneidenden.

- Vorsortieren

```
54 private TreeMap<Point, Object>
       getSortedEndPoints(ArrayList<Line> lines) {
55     TreeMap<Point,Object> a = new
           TreeMap<Point,Object>(new PointComparatorXY());
56     for (Line l : lines) {
57         a.put(l.getStart(), l);
58         a.put(l.getEnd(), l);
59     }
60     return a;
61 }
```

Einfügen in $schedule$. Jedes Einfügen ist in $O(log(n))$, es werden n Linien eingefügt
Gesamt $O(n \log(n))$

Laufzeitanalyse

- Hauptschleife

Laufzeitanalyse

- Hauptschleife
  Insgesamt $2 * n + k$ Durchläufe. In jedem wird ein neuer Punkt aus $schedule$ geholt.

```
63 private Point nextEPoint() {
64     //java api can be ugly
65     Iterator<Point> pit = schedule.keySet().iterator();
66     if(pit.hasNext()) pit.next();
67     if(pit.hasNext()) {
68         schedule = schedule.tailMap(pit.next());
69         return schedule.firstKey();
70     } else {
71         return null;
72     }
73 }
```

Laufzeitanalyse

- Hauptschleife
  Insgesamt $2 * n + k$ Durchläufe. In jedem wird ein neuer Punkt aus $schedule$ geholt.

```
63 private Point nextEPoint() {
64     //java api can be ugly
65     Iterator<Point> pit = schedule.keySet().iterator();
66     if(pit.hasNext()) pit.next();
67     if(pit.hasNext()) {
68         schedule = schedule.tailMap(pit.next());
69         return schedule.firstKey();
70     } else {
71         return null;
72     }
73 }
```

  Holen ist in $O(log(n))$, also auch wieder $O(n \log(n))$

Laufzeitanalyse Hauptschleife

- Endpunkt

```
19              if(l.getLeft() == p) { //left endpoint
20                  status.add(l);
21                  testIntersect(getPrev(l), l);
22                  testIntersect(getNext(l), l);
23              } else{ //right endpoint
24                  testIntersect(getPrev(l), getNext(l));
25                  status.remove(l);
26              }
```

Laufzeitanalyse Hauptschleife

- Endpunkt

```
19              if(l.getLeft() == p) { //left endpoint
20                  status.add(l);
21                  testIntersect(getPrev(l), l);
22                  testIntersect(getNext(l), l);
23              } else{ //right endpoint
24                  testIntersect(getPrev(l), getNext(l));
25                  status.remove(l);
26              }
```

Einfügen, Löschen und Herrausholen aus $status$ ist in $O(log(n))$.
Schnitttest ist in $O(1)$.

Laufzeitanalyse Hauptschleife

- Schnittpunkt

```
39                Line prev = getPrev(beforeUpper);
40                Line next = getNext(beforeLower);
41                status.remove(beforeUpper);
42                comp.x += 3*DELTA; //ensuring order
43                status.add(beforeUpper);
44                testIntersect(prev, beforeLower);
45                testIntersect(next, beforeUpper);
```

Laufzeitanalyse Hauptschleife

- Schnittpunkt

```
39                Line prev = getPrev(beforeUpper);
40                Line next = getNext(beforeLower);
41                status.remove(beforeUpper);
42                comp.x += 3*DELTA; //ensuring order
43                status.add(beforeUpper);
44                testIntersect(prev, beforeLower);
45                testIntersect(next, beforeUpper);
```

Einfügen, Löschen und Herrausholen aus $status$ ist in $O(log(n))$.
Schnitttest ist in $O(1)$.

Laufzeitanalyse Abschluss

Pro Durchlauf nie schlechter als $O(log(n))$.

Laufzeitanalyse Abschluss

Pro Durchlauf nie schlechter als $O(log(n))$.
Bei $2 * n + k$ Durchläufen ist das $O((2 * n + k) * log(n))$.

Laufzeitanalyse Abschluss

Pro Durchlauf nie schlechter als $O(log(n))$.
Bei $2 * n + k$ Durchläufen ist das $O((2 * n + k) * log(n))$.
k ist max n^2, in der Regel ist aber $n >> k$

Ergebnis und Ausblick

Der Algorithmus ist optimal bezüglich des Problems.

Ergebnis und Ausblick

Der Algorithmus ist optimal bezüglich des Problems.
Das Ausarten zu $O(n^2)$ ist nicht zu vermeiden wenn man alle Schnittpunkte ausgeben will.

Ergebnis und Ausblick

Der Algorithmus ist optimal bezüglich des Problems.
Das Ausarten zu $O(n^2)$ ist nicht zu vermeiden wenn man alle Schnittpunkte ausgeben will.
Trivialerweise tritt das bei der Prüfung nicht auf.

Weitere Varianten

In höherdimensionalen Räume ist das selbe Verfahren anwendbar, im 3 dimensionalen wird beispielsweise eine Sweep Ebene verwendet.

 Introduction to Algorithms. MIT Press 2001.

 Computational Geometry: An Indroduction. Springer-Verlag, 1985.

 http://www.lupinho.de/gishur/html/Sweeps.html

Den Sourcecode der Algorithmen gibt es online unter
http://zodiac.dnsalias.org/misc/ProSemDastru.tar.gz